

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”****Ediția a XXVII-a****ETAPA NAȚIONALĂ – 17 mai 2025****Clasa a XII-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică****BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE****Subiectul 1**

Se consideră mulțimea $G = (-1, 1)$ și legea de compoziție $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, $\forall x, y \in G$.

a) Să se arate că $(G, *)$ este grup comutativ.

b) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{a-x}{x+b}$

să stabilească un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

c) Să se calculeze numărul $n = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{9}$.

Soluție:

a) Demonstrează că legea $*$ este bine definită:

$$\forall x, y \in G \Leftrightarrow |x| < 1, |y| < 1; |xy| = |x| \cdot |y| < 1 \Leftrightarrow -1 < xy < 1 \text{ și deci } 1 + xy > 0$$

Inegalitățile $(1+x)(1+y) > 0$ și $(1-x)(1-y) > 0$ împărțite la $1+xy > 0$ conduc la $x * y \in G$ 1p

Asociativitatea: $(x * y) * z = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} = x * (y * z), \forall x, y, z \in G,$

Comutativitatea: $x * y = y * x, \forall x, y \in G$ 1p

Elementul neutru este $e = 0 \in G$, deoarece $x * 0 = 0 * x = x, \forall x \in G$, orice element $x \in G$ este simetrizabil și simetricul său este $-x \in G$, deoarece $x * (-x) = (-x) * x = 0$

Deci $(G, *)$ este grup comutativ 1p

b) Dacă f este izomorfism $\Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow a = b$ 1p

Din condiția $f(x * y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in G \Rightarrow a = \pm 1$.

Funcțiile $f_1(x) = \frac{1-x}{1+x}$ și $f_2(x) = \frac{-1-x}{-1+x}$ sunt funcții bijective

$\Rightarrow$ funcțiile f_1 și f_2 sunt izomorfisme între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ 1p

c) Folosind punctul b) funcția $f_1(x) = \frac{1-x}{1+x}$ este un izomorfism de la G la $\mathbb{R}_+^*$. Atunci,

pentru $a = 1$ avem $f_1(\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{9}) = f_1(\frac{1}{2}) \cdot f_1(\frac{1}{3}) \cdot \dots \cdot f_1(\frac{1}{9}) = \frac{1}{45}$ 1p

așadar, $f_1(n) = \frac{1}{45} \Rightarrow \frac{1-n}{1+n} = \frac{1}{45} \Rightarrow n = \frac{22}{23}$ 1p

Subiectul 2:

Se consideră polinomul $f = X^{n+1} + 3X^{n-1} + 1 \in \mathbb{R}[X]$, unde n este număr natural nenul.

- a) Arătați că polinomul f nu are rădăcini raționale;
- b) Demonstrați că, dacă $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, atunci $f(x)$ nu este număr întreg;
- c) Pentru $n = 3$, arătați că f nu are toate rădăcinile reale.

Soluție:

- a) cum coeficienții sunt numere întregi ($f \in \mathbb{Z}[X]$) și $a_{n+1} = 1, a_0 = 1 \Rightarrow$

singurele rădăcini din $\mathbb{Q}$ ar putea fi ± 1 1p

$f(1) \neq 0$ și $f(-1) \neq 0 \Rightarrow \pm 1$ nu sunt rădăcini $\Rightarrow f$ nu are rădăcini raționale 1p

- b) prin reducere la absurd, presupunem că $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1$ și

$x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, iar $f\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z} \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) - k = 0$ 1p

Fie polinomul $g = f - k \Rightarrow \frac{a}{b}$ este rădăcină rațională pentru g ,

dar $g \in \mathbb{Z}[X]$ și $g\left(\frac{a}{b}\right) = 0 \Rightarrow b/1 \Rightarrow b = 1$ 1p

$\Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ ceea ce contrazice faptul că $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ 1p

- c) pentru $n = 3 \Rightarrow f = X^4 + 3X^2 + 1$.

Demonstrăm că ecuația asociată: $x^4 + 3x^2 + 1 = 0$ nu are rădăcini:

Soluția 1:

$x^4 \geq 0, x^2 \geq 0$, așadar $x^4 + 3x^2 + 1 \geq 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Așadar polinomul nu are rădăcini reale.

2p

Soluția 2:

Notăm cu $t = x^2$. Ecuația devine: $t^2 + 3t + 1 = 0$, cu $t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Cum ambele valori ale lui t sunt negative, iar $t = x^2 < 0$, atunci ecuația nu are rădăcini reale.

Subiectul 3

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x^2$.

a) Să se determine $p \in \mathbb{R}$ astfel încât tangenta în punctul de abscisă $x_0 = 1$ la graficul oricărei primitive $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f să fie paralelă cu dreapta de ecuație

$$px - y - 2 = 0.$$

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\int_0^n (4 - f(x))e^x dx = e^n - 2$.

c) Să se arate că $\int_{-2}^2 \sqrt{f(x)} dx \leq 8$.

Soluție:

a) $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ 1p

Ecuația tangentei la graficul funcției F în punctul de abscisă $x_0 = 1$ este

$t: y - F(1) = F'(1)(x - 1)$ unde panta tangentei $m_t = F'(1) = f(1) = 3$ 1p

$t \parallel d: px - y - 2 = 0 \Rightarrow m_t = m_d \Rightarrow p = 3$ 1p

b) $\int_0^n (4 - f(x)) e^x dx = \int_0^n x^2 e^x dx = e^n(n^2 - 2n + 2) - 2$ 1p

Deci $e^n(n^2 - 2n + 2) - 2 = e^n - 2 \Rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \Rightarrow n = 1 \in \mathbb{N}$ 1p

c) Soluția 1:

Folosind inegalitatea mediilor $m_a \geq m_g$ vom obține

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{(2 - x)(2 + x)} \leq \frac{(2 - x) + (2 + x)}{2}, \forall x \in [-2, 2] \text{ 1p}$$

$$\text{Deci } \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx \leq \int_{-2}^2 2 dx \Rightarrow \int_{-2}^2 \sqrt{f(x)} dx \leq 8 \text{ 1p}$$

Soluția 2:

Dacă $x \in [-2, 2] \Rightarrow 4 - x^2 \geq 0$; avem $\sqrt{4 - x^2} \leq \sqrt{4} = 2$, așadar 1p

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx \leq \int_{-2}^2 2 dx \Rightarrow \int_{-2}^2 \sqrt{f(x)} dx \leq 8 \text{ 1p}$$

Subiectul 4:

Un canal de alimentare cu apă cu lungimea de 100 m are adâncimea variabilă, descrisă prin funcția:

$$h(x) = 2 + \sin\left(\frac{\pi x}{50}\right)$$

unde x este distanța în metri față de începutul canalului, iar $h(x)$ este adâncimea apei, exprimată în metri.

Canalul are pereți verticali care trebuie căptușiți cu un material impermeabil. Prețul materialului utilizat este de 120 lei/m².

Apa care trece prin canal este stocată într-un rezervor vertical cu înălțimea de 3 m, a cărei formă este generată prin rotirea curbei:

$$r(x) = 1 + x, \quad x \in [0, 3],$$

în jurul axei Ox , unde $r(x)$ este raza secțiunii rezervorului în funcție de înălțimea x , în metri. La baza rezervorului se va turna un strat de pietriș filtrant, cu înălțime constantă și cu aceeași formă interioară ca rezervorul. Volumul acestui strat reprezintă 10% din volumul total al rezervorului.

- Determinați costul total al materialului necesar pentru căptușirea pereților canalului.
- Calculați volumul rezervorului, în metri cubi.
- Determinați înălțimea stratului de pietriș filtrant turnat la bază.

Soluție:

- a)** Aria totală a suprafeței ce urmează a fi căptușită este:

$$A = 2 \int_0^{100} \left(2 + \sin\left(\frac{\pi x}{50}\right) \right) dx = 400 \text{ m}^2 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

Costul total este:

$$C = 400 \times 120 = 48.000 \text{ lei} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{b) } V = \pi \int_0^3 (1+x)^2 dx = \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$= 21\pi \approx 65,97 \text{ m}^3 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{c) } V_{\text{pietriș}} = 10\% \text{ din } V_{\text{rezervor}} = \frac{21\pi}{10} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Dar, } V_{\text{pietriș}} = \pi \int_0^h (1+x)^2 dx = \frac{(1+h)^3 - 1}{3} \pi, \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Deci } (1+h)^3 = \frac{73}{10} \Rightarrow 1+h = \sqrt[3]{\frac{73}{10}} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{73}{10}} - 1 \approx 0,93 \text{ m} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

Notă: Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.